Blochの導手公式 (代数的整数論とその周辺)

加藤, 和也

数理解析研究所講究録 1200 巻 2001 年 92-102

Blochの導手公式(斎藤毅氏との共同研究)

東大数理　加藤和也(Kazuya Kato)
University of Tokyo

これは斎藤毅氏との共同研究である。まず申し述べたいことは、共同研究ではあったが、この仕事の主な部分は斎藤毅氏によってなされたということである。

§1 Blochの導手公式

体K上の代数多様体からは、ℓ進 etale cohomology (ℓ:素数、$\ell \neq$ Kの標数)をとることで絶対ガロア群 $Gal(\bar{K}/K)$ の表現が得られる。代数多様体の性質がこのGalois表現にどう反映されるかということは、大変興味深い問題である。

以下、本稿では、Kを完備離散付値体で、剰余体kが完全体であるものとする。ℓは素数でℓはkの標数とも異なるとする。

Blochの導手公式は

differential invariant = Galois invariant

の形の予想であって、Galois表現の分岐の激しさを、微分形式と結びつけるものである。一般に微分形式の方がGalois表現よりわかりやすく、Blochの導手公式は、難解なGalois表現をわかりやすいもので理解する、という性質を持ち、またGalois表現と微分形式という、性格の異なるものを結びつける所にそのおもしろさがある。

以下，X を K の付値環 O_K 上の proper flat scheme で，regularであり，generic fiber $X_K = X\otimes_{O_K}K$ は smooth であるものとする．

X が O_K 上 smooth なら，ℓ 進 etale cohomology $H^m_{et}(X_{\bar K}, \mathbb{Q}_\ell)$ への $Gal(\bar K/K)$ の作用は不分岐であることが知られている．X が O_K 上 smooth と限らないとき，つまり X が bad reduction かも知れないとき，$Gal(\bar K/K)$ の $H^m_{et}(X_{\bar K}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用の分岐の激しさに，X の幾何がどのように反映するであろうか．

X が O_K 上 smooth $\Longleftrightarrow$ 微分加群 Ω^1_{X/O_K} が locally free である．Spencer Bloch は，微分加群の悪さ（「locally free」からどれくらい離れているか）と $Gal(\bar K/K)$ の $H^m(X_{\bar K}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用の悪さ（分岐の激しさ）の関係について，次の予想を立てた．（[B]）

予想（Blochの導手公式）

$$(-1)^{n-1} c^n_{loc}(\Omega^1_{X/O_K}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^m sw_K H^m(X_{\bar K}, \mathbb{Q}_\ell)$$
$$+ \chi(X_{\bar K}) - \chi(X_{\bar k}).$$

ここに $n=\dim(X)=\dim(X_K)+1$，sw_K は $Gal(\bar K/K)$ の表現としての $H^m(X_{\bar K}, \mathbb{Q}_\ell)$ の swan 導手（$Gal(\bar K/K)$ の作用の，wild ramification の激しさをあらわす，0以上の整数），$\chi(\ )$ は Euler-Poincaré 標数，すなわち

$$\chi(\ ) = \sum_m (-1)^m \dim H^m(\ , \mathbb{Q}_\ell)$$

（ℓ によらない）．左辺の $c^n_{loc}(\Omega^1_{X/O_K})$ は，n 次 localized Chern class という整数で，その正確な定義は複雑なので，本稿では略す（定義を知らなくても読める形に，本稿はなっている．）

Blochはこの公式を，論文[B]において，$n=2$（つまりX_Kが曲線）の場合に証明した．

注1．この予想の$n=1$の場合は，次のように，古典的な公式「共役差積＝導手」になっている．$n=1$の場合

$$X = \mathrm{Spec}(O_L)$$

ここにLはKの有限次分離拡大，となり，

$$c^1_{loc}(\Omega^1_{X/O_K}) = O_L\text{加群}\ \Omega^1_{O_L/O_K}\text{の長さ}$$
$$= \mathrm{ord}_L(\mathfrak{D}_{L/K}),\quad \mathfrak{D}_{L/K}\text{は}L/K\text{の共役差積}$$

であり，一方，$m \neq 0$なら$H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)=0$，$H^0(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$は集合$\mathrm{Hom}_K(L, \bar{K})$を基底とする自由$\mathbb{Q}_\ell$加群$\mathbb{Q}_\ell[\mathrm{Hom}_K(L,\bar{K})]$となり，

$$\chi(X_{\bar{K}}) = [L:K],\qquad \chi(X_{\bar{k}}) = [\ell : k]\quad (\ell\text{は}L\text{の剰余体})$$

となって，Blochの導手公式の右辺は

$$\mathrm{sw}_K(\mathbb{Q}_\ell[\mathrm{Hom}_K(L,\bar{K})]) + [L:K] - [\ell:k] = \mathrm{Art}_K(\mathbb{Q}_\ell[\mathrm{Hom}_K(L,\bar{K})])$$

（Art_KはArtin導手）になる．したがってBlochの導手公式の$n=1$の場合は

$$\mathrm{ord}_L(\mathfrak{D}_{L/K}) = \mathrm{Art}_K(\mathbb{Q}_\ell[\mathrm{Hom}_K(L,\bar{K})])$$

という古典的な公式に他ならない．

注2．$n=2$でX_Kが楕円曲線の場合，Blochの導手公式から，Ogg-Tateが証明した楕円曲線の導手公式（[Og]）を導きだすことができる．（[S]．）

注3　Blochの公式の右辺がℓによらないことは，落合理氏によって証明されている．（[Oc]）

Blochの導手公式についての我々の結果は次のとおりである.

定理(斎藤毅氏との共同研究)

Blochの導手公式は, X の special fiber の reduced part $(X_k)_{red}$ が X の normal crossing な divisor なら成立する.

注4 X が上の仮定をみたさなくても次のことが示せる. X から出発して regular closed subscheme を center とする blow up をくりかえして

$$X = X^{(0)} \leftarrow X^{(1)} \leftarrow \cdots\cdots \leftarrow X^{(k)}$$

のように得られる $X^{(k)}$ で上の定理の仮定をみたすものが存在するなら, X についての Blochの導手公式は正しい.

このような $X^{(k)}$ は必ず存在すると予想されており ($n=2$ なら広中平祐氏によって存在が証明されている), また具体的に X が与えられれば, こういう $X^{(k)}$ の存在を示すことが簡単にできることが多いので, 上の定理は, Blochの導手公式を「ほとんど証明したもの」と, 斎藤毅氏と私は考えている.

以下, 上の定理の証明方法についてそのあらましを述べる.

key となるアイデアは 2つあり,

(i) log の考え

(ii) 局在交叉理論 (localized intersection theory)

である. 以下 §2 で (i) について述べ, §3 で (ii) について述べ, §4 でそれらを用いてどのように上の定理を証明するかを述べる.

§2 logの考え

log pole を持つ微分形式を使って Blochの公式を書きかえる.

以下, X は定理の仮定をみたすとする.

$j : X_K \hookrightarrow X$ を包含写像とし, X 上の $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\Omega^1_{X/O_K}(\log)$, $\Omega^1_{X/O_K}(\log/\log)$ を,

$$\Omega^1_{X/O_K}(\log) = (\Omega^1_{X/O_K} \oplus (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}} j_* \mathcal{O}^\times_{X_K}))/\mathcal{F}$$

$$\Omega^1_{X/O_K}(\log/\log) = (\Omega^1_{X/O_K} \oplus (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}} j_* \mathcal{O}^\times_{X_K}))/\mathcal{G}$$

ここに $\mathcal{F}$ は

$$(df, 0) - (0, f \otimes f) \qquad (f \in \mathcal{O}_X \cap j_* \mathcal{O}^\times_{X_K})$$

が生成する $\mathcal{O}_X$ 加群層, $\mathcal{G}$ は, $\mathcal{F}$ と

$$(0, 1 \otimes f) \qquad (f \in K^\times)$$

が生成する $\mathcal{O}_X$ 加群層, と定義する. $(0, f \otimes g)$ $(f \in \mathcal{O}_X,\ g \in j_* \mathcal{O}^\times_{X_K})$ の $\Omega^1_{X/O_K}(\log)$ や $\Omega^1_{X/O_K}(\log/\log)$ における像は $f\, d\log(g)$ と書かれる.

こういうふうに log pole をつけることの良さは, 一般に

「log をつけた, X の不変量は X_K にしかよらない」

ということが, たいてい成立するように思われ, log pole をつけることでより簡明な invariant が得られると考えられることである.

<u>命題1</u>. 次の (i) (ii) (iii) は同値.

(i) X についての Bloch の導手公式

(ii) $$(-1)^{n-1} c^n_{\mathrm{loc}}(\Omega^1_{X/O_K}(\log)) = \sum_m (-1)^m \mathrm{sw}_K H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell) + \chi(X_{\bar{K}}).$$

(iii) $$(-1)^{n-1} c^n_{\mathrm{loc}}(\Omega^1_{X/O_K}(\log/\log)) = \sum_m (-1)^m \mathrm{sw}_K H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell).$$

次の§3で この (iii) の左辺を, 局所的交叉理論を用いて書きかえ, §4で その書きかえられた (iii) の証明のあらましを述べる.

§3 局在的交叉理論 (localized intersection theory)

以下，ネーター scheme S に対し，$G(S)$ で S の Grothendieck 群をあらわす．すなわち $G(S)$ は，

生成元 $[\mathcal{F}]$ （$\mathcal{F}$ は連接 $\mathcal{O}_X$ 加群層）

関係式 $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ (exact) なら $[\mathcal{F}] = [\mathcal{F}'] + [\mathcal{F}'']$

によって定義されるアーベル群である．

まず古典的交点理論を復習する

S が体 k 上の proper smooth scheme で V, W を S の部分多様体で $\dim S = \dim V + \dim W$ となるものとすると，V と W の交点数 $V \cdot W$ は，

$$(\ , \ )_S : G(S) \times G(S) \longrightarrow G(S)$$
$$([\mathcal{F}], [\mathcal{G}]) \longmapsto \sum_i (-1)^i [\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})]$$

（S が regular なので $\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ は $i >> 0$ のとき 0 となる）を用いて，

$$V \cdot W = \chi(S, ([\mathcal{O}_V], [\mathcal{O}_W])_S) \qquad \left(\chi(S, \ ) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(S, \ )\right)$$

と書かれる．そして V を体 k 上の proper smooth scheme とし上で $S = V \times_k V$，$V = W$ （これを $S = V \times_k V$ に対角的にうめこむ）とするとき，V の自己交点数 $V \cdot V$ について

$$V \cdot V = \chi(V_{\bar{k}}) = (-1)^n c^n(\Omega^1_{V/k}) \qquad (n = \dim V)$$

が成立する．

この話と似せて，我々の状況において $S = X \times_{\mathcal{O}_K} X$ とし S における X の自己交点数を考えようとすると，$X \times_{\mathcal{O}_K} X$ は regular と限らず $\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_{X \times_{\mathcal{O}_K} X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ は $i >> 0$ でも 0 にならないことがおこりうる．しかし，$X_K \times_K X_K$ は （X_K が K 上 smooth なので）

regularであり、よって連接 $\mathcal{O}_{X\times_{O_K}X}$ 加群層 $\mathcal{F}$ について $\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_{X\times_{O_K}X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ は $i>>0$ のとき X_K 上で消えるから X_k に台を持ち、$i>>0$ のとき

$$[\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_{X\times_{O_K}X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})] \in G(X_k)$$

が定まる。これについて次の命題が示せる。

命題2. (1) $\mathcal{F}$ を連接 $\mathcal{O}_{X\times_{O_K}X}$ 加群層とすると、$i>>0$ のとき

$$[\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_{X\times_{O_K}X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})] \in G(X_k)$$

は $i \bmod 2$ にしかよらない。

(2) 準同型

$$G(X\times_{O_K}X) \longrightarrow G(X_k);$$

$$[\mathcal{F}] \longmapsto [\mathcal{T}or_{2i}^{\mathcal{O}_{X\times_{O_K}X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})] - [\mathcal{T}or_{2i-1}^{\mathcal{O}_{X\times_{O_K}X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})] \quad (i>>0)$$

が存在する。($[\mathcal{F}]$ のゆき先を $(([\mathcal{O}_X], [\mathcal{F}]))_{X\times_{O_K}X}$ と書く)

(3) $$\chi(X_k, (([\mathcal{O}_X], [\mathcal{O}_X]))_{X\times_{O_K}X}) = (-1)^n c_{loc}^n(\Omega^1_{X/O_K}).$$

この(3)が、先の

$$\chi(V, ([\mathcal{O}_V], [\mathcal{O}_V])_{V\times_k V}) = (-1)^n c^n(\Omega^1_{V/k})$$

の類似と見なされる。

注5. 命題2(1)(2)は、G を有限巡回群とし、M を有限生成 $\mathbb{Z}[G]$ 加群とするとき、

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) = H_i(G, M)$$

が $i \geq 1$ なら $i \bmod 2$ にしかよらず $\#H_{2i}(G, M)/\#H_{2i-1}(G, M)$ $(i \geq 1)$ が Herbrand の商と呼ばれて重視されることによく似ている。

実際 $X\times_{O_K}X$ や $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[G])$ は regularとは限らないが…

local には regular scheme の Cartier divisor と同型である」という共通の性質を持ち, 命題2とHerbrandの商の話を, 共通の話にまとめることも可能である.

命題2の log 版も存在する.

$$(X \times_{O_K} X)(\log) = X \times_{O_K} X \text{ に } \left(\frac{pr_1^*(f)}{pr_2^*(f)}\right)^{\pm 1} \quad (f \in j_* O_{X_K}^\times) \text{ をつけ加えて}$$

得られる scheme,

$$(X \times_{O_K} X)(\log/\log) = X \times_{O_K} X \text{ に } \left(\frac{pr_1^*(f)}{pr_2^*(f)}\right)^{\pm 1} \quad (f \in j_* O_{X_K}^\times) \text{ をつけ加え.}$$

さらに「$\frac{pr_1^*(f)}{pr_2^*(f)} = 1$ if $f \in K^\times$」とおいて得られる scheme

とおく. $(X \times_{O_K} X)(\log)$ は $X \times_{O_K} X$ のある blow up の open set, $(X \times_{O_K} X)(\log/\log)$ は $(X \times_{O_K} X)(\log)$ の closed subscheme であり, これらの scheme は X からの対角埋めこみを持ち, またこれらの scheme の generic fiber はいずれも $X_K \times_K X_K$ である

命題3. (1) 対角埋めこみ $X \to X \times_{O_K} X$, $X \to (X \times_{O_K} X)(\log)$, $X \to (X \times_{O_K} X)(\log/\log)$ のイデアル (埋めこみ先の X を定義するイデアル) をそれぞれ J, $J(\log)$, $J(\log/\log)$ とおくと,

$$\Omega^1_{X/O_K} \cong J/J^2 \quad (\text{これはよく知られていること})$$

$$\Omega^1_{X/O_K}(\log) \cong J(\log)/J(\log)^2,$$

$$\Omega^1_{X/O_K}(\log/\log) \cong J(\log/\log)/J(\log/\log)^2.$$

(2) 命題2の(1)(2)は $X \times_{O_K} X$ を, $(X \times_{O_K} X)(\log)$ や $(X \times_{O_K} X)(\log/\log)$ におきかえても成立する.

(3) $\chi(X_k, ((([\mathcal{O}_X], [\mathcal{O}_X]))_{X \times_{O_K} X}) = (-1)^n c^n_{loc}(\Omega^1_{X/O_K})$ （命題2 (3)のとおり）

$\chi(X_k, ((([\mathcal{O}_X], [\mathcal{O}_X]))_{(X \times_{O_K} X)(log)}) = (-1)^n c^n_{loc}(\Omega^1_{X/O_K}(log))$

$\chi(X_k, ((([\mathcal{O}_X], [\mathcal{O}_X]))_{(X \times_{O_K} X)(log/log)}) = (-1)^n c^n_{loc}(\Omega^1_{X/O_K}(log/log))$.

§4 Blochの導手公式の証明

以上により、定理の証明のためには、

$$(☆) \quad \chi(X_k, ((([\mathcal{O}_X], [\mathcal{O}_X]))_{(X \times_{O_K} X)(log/log)}) = -\sum_m (-1)^m \mathrm{sw}_K H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell))$$

を証明すればよいことになった。

Kをその最大不分岐拡大の完備化でおきかえてもよいので、Kの剰余体kは代数閉体と仮定してよい。以下kは代数閉とする。

まず右辺のSwan導手の定義を復習する。Kの有限次ガロア拡大K'で$Gal(\bar{K'}/K')$のpro-p部分が$H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$にtrivialに作用するものが存在する。そのようなK'をとり $G = Gal(K'/K)$、PをGのp巾部分として

$$\mathrm{sw}_K(H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)) = -\frac{1}{\#(G)} \sum_{\sigma \in P} j(\sigma) \mathrm{Tr}(\sigma : H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell))$$

ここに

$$j(\sigma) = \begin{cases} \mathrm{length}_{O_L}(O_L/J_\sigma) & J_\sigma = \left(\frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} - 1 : \alpha \in L^\times\right) \cdots \sigma \neq 1 \text{のとき} \\ -\mathrm{length}_{O_L}(\Omega^1_{O_L/O_K}(log/log)) & \cdots \sigma = 1 \text{のとき} \end{cases}$$

とおく。（kの標数が0のときは、pro-p部分、p巾部分は{1}と定める。）

すると $\mathrm{Sw}_K H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は K' のとり方によらない.

話を簡明にするため, K の有限次ガロア拡大 K' と $O_{K'}$ 上の proper semi-stable scheme X' で, $\mathrm{Gal}(K'/K)$ が X' に作用し, birational map $X' \to X \times_{O_K} O_{K'}$ で $\mathrm{Gal}(K'/K)$ の作用を保つものが存在すると仮定する. このような K', X' の存在は現在まだ証明されていないが, それの代わりをするものが de Jong の alteration の理論 ([J]) により存在し ($X' \to X \times_{O_K} O_{K'}$ が birational にとれないかもしれないが generically finite にはとれる) それを用いて以下と同様の議論をすることができる. $X' \times_{O_K} X' \to X \times_{O_K} X$ を f と書く

① $$\chi(X_k, (([O_X], [O_X]))_{(X \times_{O_K} X)(\log/\log)})$$

$$= \frac{1}{\#(G)} \chi(X'_k, (([O_{X'}], f^*[O_X]))_{(X' \times_{O_K} X')(\log/\log)})$$

② $$(([O_{X'}], f^*[O_X]))_{(X' \times_{O_K} X')(\log/\log)})$$

$$= \sum_{\sigma \in G} ((O_{X'}, O_{\Gamma_\sigma}))_{(X' \times_{O_K} X')(\log/\log)}$$

ここに Γ_σ は $(X' \times_{O_K} X')(\log/\log)$ における σ のグラフ.

③ $$(([O_{X'}, O_{\Gamma_\sigma}))_{(X' \times_{O_K} X')(\log/\log)}$$

$$= \begin{cases} j(\sigma) \; (O_{X'_k}, O_{(\Gamma_\sigma)_k})_{(X' \times_{O_K} X')(\log/\log)_k} & \cdots\cdots \sigma \in P \text{ のとき} \\ 0 & \cdots \sigma \notin P \text{ のとき} \end{cases}$$

$(\ ,\ )$ は通常の交点理論 $\sum_i (-1)^i [\mathrm{Tor}_i]$,
P は G の p 中部分

④ $\sigma \in P$ に対し

$$\chi(X'_{\bar{k}}, (\mathcal{O}_{X'_{\bar{k}}}, \mathcal{O}_{\Gamma_\sigma})_{\bar{k}} \cdot {}_{(X' \times_{O_K} X')(\log/\log)_{\bar{k}}})$$

$$= \mathrm{Tr}(\sigma : H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)).$$

以上の ①〜④ を合わせれば (☆) の証明になっている.
ここで ① は formal な議論で得られ, ② は, $X_K \times_K X_K$ の diagonal の $X'_{\bar{K}} \times_K X'_{\bar{K}}$ へのひきもどしが G の元のグラフの和になっていることと, log をつけた invariant が generic fiber にしかよらないという考えによって得られ, ③ は X' の semi-stable 性を用いた直接計算で得られ, ④ は Lefschetz の trace formula の証明と同様にして, log étale cohomology 論 (中山能力氏 [N]) を用いると得られる.

引用文献

[B] Bloch, S., Cycles on arithmetic schemes and Euler characteristics of curves, Algebraic Geometry, Bowdoin, Proc. Symp. Pure Math. 46 Part 2 Amer. Math. Soc. (1987) 421-450.

[J] de Jong, A. J., Families of curves and alterations, Ann. Inst. Fourier 47 (1997) 599-621.

[Oc] Ochiai, T., ℓ-independence of the trace of monodromy, Math. Ann. 掲載予定

[Og] Ogg, A., Elliptic curves and wild ramification, Amer. J. Math. 89 (1967) 1-21.

[S] Saito, T., Conductor, discriminant, and the Noether formula for arithmetic surfaces, Duke Math. J. 57 (1988) 151-173.

[N] Nakayama, C. Logarithmic étale cohomology, Math. Ann 308 (1997) 365-404